Corrigé type de l'examen de Mathématiques et Statistique
Promotion : 1^{ère}année ingénieur agronomie

Exercice 1 (06 pts)

1 Les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions données :

ⓐ $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ **1pt**

ⓑ $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ **1pt**

2 Le calcul des limites :

ⓐ $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{6} - \varepsilon_1(x)\right)}{x^3} = \frac{1}{6}$$ **2pts**

ⓑ $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) - x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + x\varepsilon_2(x)\right)}{3x^2} = \frac{1}{6}$$ **2pts**

Exercice 2 (06 pts)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	α

1 La valeur du réel α: $\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1 \Leftrightarrow 0,1 + 0,3 + 0,4 + \alpha = 1 \Leftrightarrow 0,8 + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0,2$ **1pt**

2 Le calcul de $P(X \leq 2)$ et $P(X > 1)$:

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,8$ **1pt**
$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,6$ **1pt**

3 Le calcul de $E(X)$ et $\sigma(X)$:

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 1,7$ **1,5pt**

$V(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2 = (1)^2 \times 0,3 + (2)^2 \times 0,4 + (3)^2 \times 0,2 - (1,7)^2 = 0,81$ **1pt**

Alors, $\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,81} = 0,9$ **0,5pt**

Exercice 3 (08 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$.

1 Calculons la limite de f en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x + 3)e^{-x} = 0$. **1pt**
On déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. **0,5pt**

2 La fonction dérivée de f: $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2e^{-x} - (2x + 3)e^{-x} = (-2x - 1)e^{-x}$ **1pt**

3 (a) Résolution de l'inéquation $f'(x) \geq 0$: on a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (-2x-1)e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ **1pt**

(b) Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ **0,5pt**
- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$ **0,5pt**

(c) Le tableau de variation de f : **1pt**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	0

4 (a) Le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto e^{-x}$: **1pt**
$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

(b) Cherchons le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction f : **1pt**
On a

$$\begin{aligned} f(x) = (2x+1)e^{-x} &= (2x+3)(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)) \\ &= 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2(x + 2x\varepsilon_1(x) + 3\varepsilon_1(x)) \\ &= 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to} = (x + 2x\varepsilon_1(x) + 3\varepsilon_1(x)) = 0$.

(c) L'équation de la tangente (Δ) : $y = -x + 3$ **0,5pt**

Une séance de consultation est programmée le 30/01/2024, Salle 4 du Pav A1 à 13h 30'.